DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1988 D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I — DUREE : 3 heures — COEFFICIENT : 2

La rigueur des développements et la clarté de leur présentation seront pris en compte dans la notation de la copie.

Les parties II et III du problème sont indépendantes.

On indique qu'une fonction réelle f continue sur un intervalle fermé borné I y est uniformément continue,

(c'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que, $\forall x \in I,\ \forall x' \in I : |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

I - 1) Soient f et g deux fonctions réelles intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)dt$$

est convergente, la fonction $x \longmapsto I(x)$ est notée $f*g$. Vérifier que :

a) $f*g = g*f$

b) Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, etpour tout couple (g_1, g_2) de fonctions réelles telles que $f*g_1$ et $f*g_2$ existent,on a :

$$f*(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1(f*g_1) + \lambda_2(f*g_2)$$

2) Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = 0, \quad \forall x < 0$
$u(x) = 1 \quad \forall x > 0$
$u(0) = 1/2$

A tout entier $n \geqslant 1$ on associe la fonction u_n définie par :

$$u_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} u(t)dt$$

Calculer $u_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que devient $u_n(x)$ si l'on donne à u(o) une valeur différente de1/2 ?La fonction u_n est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$

3) Trouver une fonction réelle g_n, définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}$, continue à droite au point $x = \frac{1}{n}$ et à gauche au point $x = -\frac{1}{n}$, telle que $u_n = u*g_n$

Donner la valeur de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$g_n(x) = n\, g(nx),$$

où g est une fonction réelle, dont on donnera la valeur g(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Soit φ la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in [-1, +1] \quad \varphi(x) = \cos^2(\tfrac{\pi}{2} x)$$

$$\forall x \notin [-1, +1] \quad \varphi(x) = 0$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désigne par φ_n la fonction :

$$x \longmapsto \varphi_n(x) = n.\varphi(nx)$$

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)dx$

5) Calculer la valeur, en tout point x de $\mathbb{R}$, de la fonction : $U_n = u*\varphi_n$. Donner la représentation graphique de U_n. Cette fonction est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

6) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les limites de $u_n(x)$ et de $U_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

7) Calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x) - u(x)|$. Ces bornes supérieures tendent-elles vers 0 lorsque n tend vers l'infini ?

II - Soit ρ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, ayant les propriétés suivantes :

i) ρ est à valeurs positives et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \notin [-\alpha, +\alpha], \rho(x) = 0$ et $\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(x)dx = 1$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par ρ_n la fonction : $x \longmapsto n\rho(nx)$

et par v_n la fonction: $v_n = u*\rho_n$

1) Calculer $v_n(x)$ pour tout $x \notin [-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}]$. Pour tout $x \in [-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}]$, donner une expression de $v_n(x)$ sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction ρ.

2) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} v_n(x)$. A quelle condition doit satisfaire la fonction ρ pour que l'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} v_n(x) = u(x)$?

3) Démontrer que, pour tout n, la fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Prouver que, si ρ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction v_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

5) f étant une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f*\rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} f*\rho_n(x) = f(x).$$

III - 1) Soient p et q deux entiers naturels et (a;b) un couple de nombres réels tels que a < b. On pose :

$$\int_a^b (x-a)^p\, (b-x)^q\, dx = I(p,q)$$

Pour tout $q \geqslant 1$ établir une relation linéaire entre I(p,q) et I(p+1, q-1). Calculer alors I(p,q).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx = a_n$. Donner la valeur de a_n.

3) Montrer que $a_n \geqslant \frac{2}{n+1}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction

$$x \longmapsto h_n(x) = \frac{1}{a_n} (1-x^2)^n \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$= 0 \quad \forall x \notin [-1,1]$$

Vérifier que h_n est continue sur $\mathbb{R}$.

5) A toute fonction réelle f, définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \notin [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],\ f(x) = 0,$$

on associe la fonction $f_n = f*h_n$. Démontrer que la restriction de f_n à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est une fonction polynôme. Que peut-on dire de son degré ?

TOURNER S.V.P.

6) Pour une fonction f vérifiant les conditions de la question précédente, montrer que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \quad \left|\int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x-t)]\, h_n(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

7) Démontrer que si $t \in]-1, -\delta[\cup]\delta, 1[$ on a :

$$|h_n(t)| \leqslant \frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$$

En déduire l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}], \left|\int_{-1}^{-\delta} [f(x) - f(x-t)]h_n(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

8) Vérifier alors la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Que peut-on dire de f_n ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail